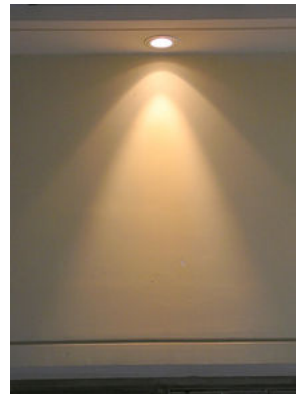
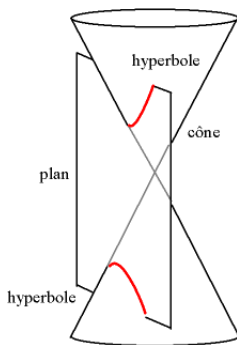




Fonction inverse

1. rappels sur la fonction inverse : définition, premières propriétés

La représentation graphique de la fonction inverse est une hyperbole; c'est la "trace" d'un plan qui couperait un cône parallèlement à son axe; on peut en avoir un aperçu en plaçant un spot lumineux près d'un mur : le mur vertical "coupe" le cône de lumière selon une hyperbole.



Définition 2.1 La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul associe son inverse.

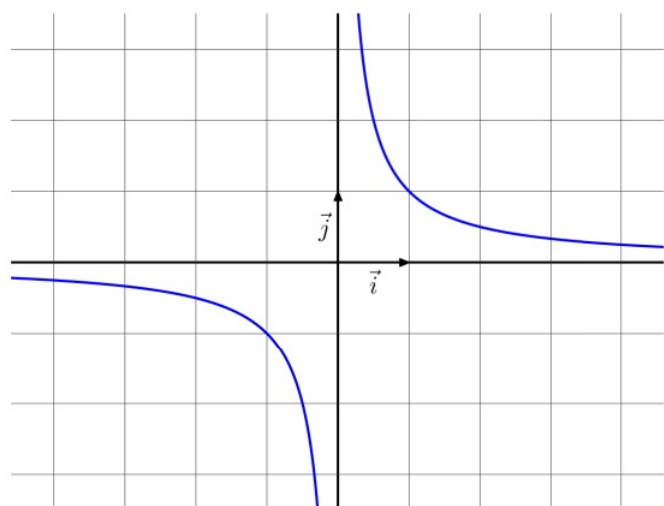
$$\text{Pour } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété 2.1 La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$	0

Courbe représentative :



La courbe représentative de la fonction inverse est une *hyperbole* de centre O et d'asymptotes (Ox) et (Oy) .

2. Limites de la fonction inverse

On appelle "limite" la valeur dont la fonction s'approche sans jamais l'atteindre; par exemple quand x s'approche de $+\infty$, la valeur de $\frac{1}{x}$ s'approche de 0. on notera : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Propriété 2.2 Pour la fonction inverse, on a les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Exercice 2.1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x}$

.....

.....

.....

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{x}$

.....

.....

.....

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{5}{x} + 1$

.....

.....

.....

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x} - 8$

.....

.....

.....

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{41}{x} + 9$

.....

.....

.....

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x}$

.....

.....

.....

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{9}{x}$

.....

.....

.....

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 + \frac{2}{x}$

.....

.....

.....

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} -20 + \frac{1}{x}$

.....

.....

.....

10. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x}$

.....

.....

.....

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{16}{x}$$

.....

.....

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{11}{x}$$

.....

.....

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{22}{x}$$

.....

.....

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x}$$

.....

.....

$$15. \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{6}{x}$$

.....

.....

$$16. \lim_{x \rightarrow 0^+} 6 + \frac{22}{x}$$

.....

.....

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^-} 4 - \frac{39}{x}$$

.....

.....

3. Dérivée de la fonction inverse

Propriété 2.3 La fonction inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La dérivée de la fonction inverse est donc toujours négative, la fonction inverse est toujours décroissante, ce qui confirme le tableau de variations donné précédemment.

Exercice 2.2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = \frac{26}{x}$$

.....

.....

.....

$$2. f(x) = -\frac{12}{x}$$

.....

.....

.....

$$3. f(x) = -\frac{1}{x}$$

.....

.....

$$4. f(x) = 7 + \frac{8}{x}$$

$$5. f(x) = \frac{17}{x} - 9$$

$$6. f(x) = -5 + \frac{31}{x}$$

$$7. f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$8. f(x) = 5x - 2 + \frac{14}{x}$$

$$9. f(x) = -1,25x + \sqrt{3} - \frac{100}{x}$$

$$10. f(x) = 5x^2 - 6x + \frac{37}{x}$$

$$11. f(x) = -6x^2 - 3,2x + 20 - \frac{4}{x}$$

$$12. f(x) = \frac{41}{x} + \frac{1}{2}x^2 - 7x + 1$$

13. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{13}{x}$

14. $f(x) = -\frac{5}{x} + 4x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{3}{7}$

4. Signe de la dérivée et tableau de variations

Propriété 2.4 On rappelle que pour les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f' est positive, la fonction f est croissante.
Pour les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f' est négative, la fonction f est décroissante.

Exercice 2.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{6}{x} + 2,3$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

3. Dresser le tableau de variations de f

Exercice 2.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

.....

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

.....

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$

.....

Exercice 2.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$f(x) = x^3 + 11x - 7 - \frac{9}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$

.....

2. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$

.....

Exercice 2.6 Lorsqu'un véhicule roule entre 10 km/h et 130 km/h, sa consommation d'essence (en litres) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en km/h) suivant la formule :

$$C(v) = 0,06v + \frac{150}{v}$$

1. Vérifier que pour tout v appartenant à l'intervalle $[10;130]$, on a :

$$c'(v) = \frac{0,06(v-50)(v+50)}{v^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Étudier le signe de $c'(v)$ sur l'intervalle $[10;130]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction c .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. (a) En déduire la vitesse à laquelle doit rouler ce véhicule pour que sa consommation d'essence soit minimale.

.....

.....

.....

- (b) Déterminer la consommation minimale en litres.

.....

.....

.....

Exercice 2.7 Une entreprise fabrique des tables de jardin. la production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.

Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à

$$C(q) = q^2 + 50q + 100$$

où q appartient à l'intervalle $[1;30]$.

1. (a) Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

.....

.....

.....

- (b) Calculer le coût **unitaire** de production, en euros, pour 20 tables produites.

.....

.....

.....

2. A chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production,

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q}$$

- (a) Représenter la fonction C_u sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites la coût unitaire est inférieur ou égal à 80€.

.....

.....

.....

- (b) Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1;30]$,

$$C'_u(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (c) Etudier le signe de C'_u sur l'intervalle $[1;30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_u

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- (d) Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

.....

.....

.....

.....

.....